ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC

———————o0o———————

BÙI THỊ HẰNG

PHƯƠNG TRÌNH HÀM CAUCHY VÀ MỘT SỐ BIẾN THỂ CỦA NÓ

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

THÁI NGUYÊN, 2017

ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC

———————o0o———————

BÙI THỊ HẰNG

PHƯƠNG TRÌNH HÀM CAUCHY VÀ MỘT SỐ BIẾN THỂ CỦA NÓ

Chuyên ngành: Phương pháp Toán sơ cấp
Mã số: 60 46 01 13

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

NGƯỜI HƯỚNG DẪN KHOA HỌC:
TS. NGUYỄN ĐÌNH BÌNH

THÁI NGUYÊN, 2017

LỜI CẢM ƠN

Luận văn được hoàn thành tại trường Đại học Khoa học - Đại học Thái Nguyên dưới sự hướng dẫn của TS.NGUYỄN ĐÌNH BÌNH. Tác giả xin trân trọng bày tỏ lòng kính trọng và biết ơn sâu sắc tới TS.NGUYỄN ĐÌNH BÌNH, thầy đã tận tình chỉ bảo, hướng dẫn, động viên khích lệ và tạo điều kiện thuận lợi cho tác giả trong suốt quá trình học tập và nghiên cứu luận văn.

Qua bản luận văn này, tác giả xin gửi lời cảm ơn tới các thầy cô trong trường Đại học Khoa học - Đại học Thái Nguyên nói chung và các thầy cô trong khoa Toán - Tin học nói riêng đã dạy bảo và dìu dắt tác giả trong suốt thời gian qua.

Tác giả cũng xin cảm ơn gia đình, bạn bè, đồng nghiệp và tất cả mọi người đã quan tâm, động viên và giúp đỡ để tác giả có thể hoàn thành luận văn của mình.

Tác giả xin chân thành cảm ơn!

Thái Nguyên, tháng 06 năm 2017

Học viên

Bùi Thị Hằng

Mục lục

MỞ ĐẦU

1. Lý do chọn đề tài.

Một phương trình được nhiều người biết đến và là phương trình cơ bản trong lý thuyết phương trình hàm là phương trình hàm Cauchy. Phương trình hàm Cauchy là một trong những lĩnh vực hay và khó của toán học sơ cấp, nó có nhiều ứng dụng trong lý thuyết phương trình hàm và trong các lĩnh vực toán học và khoa học khác, bao gồm hình học giải tích, nghiên cứu giải tích, giải tích phức, xác xuất thống kê, giải tích hàm, động lực học, phương trình vi phân, cơ học cổ điển, cơ học thống kê và kinh tế học.

Phương trình hàm Cauchy đã được giới thiệu trong sách của ông từ năm 1821. Cauchy đã phân tích chặt chẽ phương trình đó từ các giả thuyết rằng hàm số f bất kì là một hàm số liên tục từ $\mathbb{R}$ đến $\mathbb{R}$ và các biến x, y có thể là các số thực bất kì. Gauss cũng đã nghiên cứu phương trình hàm Cauchy trong cuốn sách của ông từ năm 1809, nhưng sự nghiên cứu này không chặt chẽ và cũng không rõ ràng. Trở lại những năm trước nữa, năm 1794, ta có thể tìm thấy trong sách của Legendre, ở phần dành cho sự nghiên cứu tỉ số diện tích của các hình chữ nhật, cả ứng dụng và phân tích của phương trình hàm Cauchy, tuy nhiên chúng vẫn chưa chặt chẽ và không rõ ràng. Do đó nó đã thu hút sự chú ý của các tác giả trong khoảng thời gian dài. Kannappan đã viết: "Các nhà nghiên cứu đã đam mê những phương trình này [Phương trình hàm Cauchy và 3 kiểu tương đương], và sự ảo tưởng này sẽ tiếp tục và dẫn đến nhiều thành quả thú vị hơn."

Hướng đi chung của việc nghiên cứu phương trình hàm Cauchy là sử dụng nhiều loại điều kiện thông thường trên hàm số bất kì. Nó chỉ ra rằng trong trường hợp đặc biệt khi $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, mỗi điều kiện này suy ra sự tồn tại của $c \in \mathbb{R}$, sao cho $f(x) = cx$, với mọi $x \in \mathbb{R}$, và thực tế này đã được chứng minh bằng nhiều cách. Ví dụ, Cauchy đã giả sử f liên tục. Darboux đã chứng minh rằng f có thể được giả thiết hoặc đơn điệu hoặc bị chặn trên một khoảng, Fréchet, Blumberg, Banach, Sierpinski, Kac, Alexiewicz-Orlicz, và Figiel đã giả thiết rằng f là đo được Lebesgue, Kormes đã giả thiết rằng f bị chặn trên tập đo được dương, Ostrowski và Kestelman đã giả thiết rằng f bị chặn từ một bên trên tập đo được dương, và Mehdi đã giả thiết rằng f bị chặn trên trên tập nhóm Baire. Mặt khác, Hamel đã nghiên cứu phương trình hàm Cauchy khi không có bất kì điều kiện khác của f. Bằng việc sử dụng cơ sở Hamel, ông ta đã suy ra rằng có nhiều nghiệm không tuyến tính từ phương trình hàm Cauchy và ông đã tìm ra tất cả chúng.

Phương trình hàm Cauchy đã được khái quát hóa hay bổ sung theo nhiều hướng. Một hướng điển hình là lấy miền xác định và miền giá trị của f thành các nhóm của loại nào đó, ví dụ (compact địa phương) nhóm Polish, và để chứng minh rằng nếu f thỏa mãn một điều kiện bất kì của giả thuyết đo được (Baire, Haar, hay Christensen), và có thể là các giả thuyết cộng tính, thì nó phải liên tục (Chú ý: thay vì nói phương trình hàm Cauchy, ta nói là hàm thuần nhất hoặc cộng tính). Một hướng khác là lợi dụng các giả thuyết từ tính đo được. Chưa hướng đi tổng quát nào là thay đổi định nghĩa miền xác định của f để mà sẽ không có một cấu trúc đại số đẹp nữa, mà là sẽ chỉ đơn thuần là tập con nào đó của miền xác định chính thức, ví dụ một tập lồi, phần bù của tập đo được 0, vv. Sự biến đổi này là để thay đổi miền giá trị của phương trình, ví dụ, giả sử rằng f thỏa mãn phương trình hàm Cauchy chỉ với cặp (x, y) thuộc vào tập con của $\mathbb{R}^{2n}$, ví dụ đa tạp (và f có thể được định nghĩa trên toàn không gian hoặc trên tập con của nó). Trong tất cả các trường hợp này, ta có thể kết luận sự tồn tại nghiệm không tuyến tính của phương trình hàm Cauchy (mặc dù các điều kiện đều mạnh) hoặc (trong trường hợp khi f được giả định định nghĩa trên toàn bộ không gian) f phải thỏa mãn nó với tất cả các cặp (x, y) có thể.

Bài toán phương trình hàm Cauchy và một số biến thể của nó là công cụ để giải quyết rất nhiều bài toán phương trình hàm hay và khó, nó xuất hiện nhiều trong các đề thi học sinh giỏi trong nước và quốc tế và thường là một thách thức đối với học sinh. Nhiều tài liệu và các đề tài về phương trình hàm Cauchy đã được biên soạn và thực hiện. Tuy nhiên mỗi tài liệu chỉ trình bày một số vấn đề và các ứng dụng, chưa bao quát được đầy đủ. Vì vậy, các vấn đề về phương trình hàm Cauchy vẫn còn rất phong phú.

2. Mục đích.

Mục đích của luận văn là nghiên cứu các vấn đề liên quan đến phương trình hàm, phương trình hàm Cauchy và một số biến thể của nó, xem xét khả năng giải được và sự ổn định tương đối của nó đối với các tập con của không gian Euclide đa chiều. Một số loại điều kiện mới được trình bày, chẳng hạn như một phương trình trong đó một số mũ phức tạp các hàm chưa biết.... Các phân tích được mở rộng đến một số biến thể của phương trình hàm Cauchy. Đặc biệt là ứng dụng các lý thuyết này trong việc giảng dạy và bồi dưỡng kiến thức toán học cho học sinh THPT và là tài liệu tham khảo cho sinh viên ngành Toán học.

3. Đối tượng và phạm vi nghiên cứu.

Đối tượng nghiên cứu của luận văn là phương trình hàm Cauchy và một số biến thể của nó. Một cách cụ thể, luận văn sẽ trình bày các kết quả chính trong các tài liệu tham khảo [1], [2], [3] và các bài báo [4], [5].

4. Phương pháp nghiên cứu.

Thu thập các bài báo khoa học và tài liệu của các tác giả nghiên cứu liên quan đến phương trình hàm Cauchy và ứng dụng.

Trao đổi qua email với thầy hướng dẫn về các ứng dụng của phương trình hàm Cauchy và một số biến thể của nó.

5. Bố cục luận văn.

Tác giả tiến hành nghiên cứu hai nội dung chính tương ứng với hai chương:

Chương 1. Phương trình hàm Cauchy.

1.1. Tổng quan về phương trình hàm.

1.2. Phương trình hàm Cauchy.

1.3. Phương trình hàm Cauchy tổng quát.

1.4. Một số bài toán ứng dụng.

Chương 2. Một số biến thể của phương trình hàm Cauchy và ứng dụng.

2.1. Tiếp cận giá trị ban đầu.

2.2. Phương trình Cauchy trên miền hạn chế.

2.3. Một số biến thể của phương trình Cauchy.

2.4. Một số ví dụ minh họa.

Chương 1

Phương trình hàm Cauchy.

Trong chương này, tác giả trình bày định nghĩa, tính chất của phương trình hàm. Trong đó, tác giả đi sâu về nghiên cứu phương trình hàm Cauchy và một số bài toán ứng dụng.

Nội dung chính được tham khảo tại các tài liệu [1], [2], [3].

1.1 Tổng quan về phương trình hàm.

Định nghĩa 1.1 *Phương trình hàm là phương trình mà ẩn là các hàm số. Giải phương trình hàm tức là tìm các hàm số chưa biết đó.*

Tiếp cận phương trình hàm, mỗi người có những cơ sở và phương pháp khác nhau. Tuy nhiên, dựa vào đặc trưng của các hàm ta có thể xây dựng được một số định hướng như sau:

1. Thế các giá trị biến phù hợp: Hầu hết các giá trị ban đầu có thể thế vào là: $x = 0,\ x = 1,\ ...$; từ đó tìm ra một tính chất quan trọng nào đó hoặc các giá trị đặc biệt của hàm hoặc tìm cách chứng minh hàm số hằng.

2. Quy nạp toán học: Đây là phương pháp sử dụng giá trị $f(x)$ và bằng cách quy nạp với $n \in \mathbb{N}$ để tìm $f(n)$. Sau đó tìm $f(\frac{1}{n})$ và $f(e)$. Phương pháp này thường áp dụng trong bài toán mà ở đó hàm f đã được xác định trên $\mathbb{Q}$; từ đó mở rộng trên các tập số rộng hơn.

3. Sử dụng phương trình Cauchy và kiểu Cauchy.

4. Nghiên cứu tính đơn điệu và tính liên tục của các hàm. Các tính chất này áp dụng trong phương trình hàm Cauchy hoặc kiểu Cauchy. Các phương trình đó nếu không có tính đơn điệu, liên tục thì bài toán trở nên phức tạp hơn nhiều.

5. Tìm điểm cố định hoặc giá trị 0 của các hàm.

6. Nghiên cứu tính đơn ánh và toàn ánh của các hàm lũy thừa trong phương trình.

7. Dự đoán hàm và dùng phương pháp phản chứng để chứng minh điều dự đoán đúng.

8. Tạo nên các hệ thức truy hồi.

9. Miêu tả tính chất chẵn, lẻ của hàm số.

Từ một số định hướng nêu trên, tác giả tâm đắc phần phương trình hàm Cauchy nên đã đi sâu vào nghiên cứu nó.

1.2 Phương trình hàm Cauchy.

Định nghĩa 1.2 *Phương trình hàm Cauchy là phương trình hàm có dạng:*

$$f(x+y) = f(x) + f(y),\ \forall x,\ y \in \mathbb{R}, \tag{1.1}$$

trong đó, $f(x)$ là hàm xác định trên $\mathbb{R}$.

Hàm f thỏa mãn phương trình

$$f(x+y) = f(x) + f(y),\ \forall x,\ y \in \mathbb{R},$$

được gọi là hàm cộng tính.

Định lý 1.1 *Hàm số liên tục $f(x)$ là nghiệm của phương trình (1.1) khi và chỉ khi:*

$$f(x) = ax,\ \forall x \in \mathbb{R},$$

trong đó, a là hằng số tùy ý.